Centrale-Supélec 2024 PC mathématiques 1

Corrigé proposé par Guillaume Gallois

Faire -25 aux numéros des questions pour correspondre au DS4bis

Q 26. Soit μ une racine complexe de P'. Alors μ n'est pas racine de P car P est scindé à racines simples. Par conséquent , μ n'est pas valeur propre de M donc $M - \mu I_q$ est inversible.

cours : $M - \mu I_q$ inversible ssi $\mu \in \mathrm{Sp}(M)$

On décompose $P' = \prod_{i=1}^{s'}(X-\mu_i)^{n_i}$. On a alors $P'(M) = \prod_{i=1}^{s'}(M-\mu_i I_q)^{n_i}$.

D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![1, s']\!]$, $M - \mu_i I_q$ est inversible, donc $P'(M)$ est un produit de matrices inversibles, donc $P'(M)$ est inversible.

Q 27. On a $\chi_M = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \leqslant q$ car $\deg(\chi_M) = q$.

Par conséquent,

$$P^q = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^q = \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}(X-\lambda_i)^{q-\alpha_i} = \chi_M \underbrace{\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{q-\alpha_i}}_{\in\mathbb{C}[X] \text{ car } q\geqslant\alpha_i}$$

Donc χ_M divise P^q, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P^q = \chi_M Q$.

On en déduit $P(M)^q = \chi_M(M)Q(M) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton ($\chi_M(M) = 0$).

Donc $P(M)$ est nilpotente.

Q 28. On utilise l'existence de $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > q$. On a alors $P(M)^{2^n} = 0$ d'après la question précédente donc, $P(M_n) = 0$ et par conséquent, $M_{n+1} = M_n$. Ce qui montre que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q 29. Montrons par récurrence que M et M_n commutent.

Init : pour $n = 0$, $M_n = M_0 = M$ donc le résultat est clair.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que M et M_n commutent.

On a $P(M_n) = P(M)^{2^n} B_n$ avec $B_n \in \mathbb{C}[M]$ donc $P(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc $MP(M_n) = P(M_n)M$.

On a $P(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc $P'(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc $MP'(M_n) = P'(M_n)M$ et par conséquent, $MP'(M_n)^{-1} = P'(M_n)^{-1}M$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} MM_{n+1} &= \underbrace{MM_n}_{=M_nM} - \underbrace{MP(M_n)}_{=P(M_n)M} P'(M_n)^{-1} = M_nM - P(M_n)\underbrace{MP'(M_n)^{-1}}_{=P'(M_n)^{-1}M} = \left(M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1}\right)M \\ &= M_{n+1}M \end{aligned}$$

Q 30. En reprenant le raisonnement de la question 28, pour tout n tel que $2^n \geqslant q$, $P(M_n) = 0$ et

caractérisation de A diagonalisable par existence d'un polynôme annulateur scindé simple

$M_n = A$. D'où $P(A) = 0$: P est un polynôme annulateur de A , scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Q 31. D'après Q29, M et M_n commutent pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A = M_{n_0}$, M et A commutent. Par conséquent, $AN = A(M - A) = AM - A^2 = MA - A^2 = (M - A)A = NA$.

Soit n_0 tel que $M_{n_0+1} = A$. On a alors

$$\begin{aligned} N = M - A = M_0 - M_{n_0+1} &= \sum_{n=0}^{n_0} (M_n - M_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} P(M_n)P'(M_n)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} P(M)^{2^n} B_n P'(M_n)^{-1} \\ &= P(M) \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} P(M)^{2^n-1} B_n P'(M_n)^{-1}}_{=C} = P(M)C \end{aligned}$$

$P(M)$ et C commute car $B_n \in \mathbb{C}[M]$ et $P'(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc

$$N^q = P(M)^q C^q = 0 \quad \text{car} \quad P(M)^q = 0 \quad \text{(Q27)}$$

Q 32. On écrit le développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre $q-1$, en reprenant les notations dela question 3 :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^{n+1} b_n x^n + o(x^{q-1}) = R_q(x) + o(x^{q-1}) \quad \text{avec} \quad R_q(x) = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

Alors par produit de DL :

$$1 + x = \sqrt{1+x}^2 \underset{x\to 0}{=} R_q(x)^2 + o(x^{q-1}) \quad \text{donc} \quad 1 + x - R_q(x)^2 \underset{x\to 0}{=} o(x^{q-1})$$

Par conséquent, le monôme de plus petit degré dans le polynôme $1 + X - R_q(X)^2$ est $a_n X^n$ avec $n \geqslant q$, autrement dit :

$$1 + X - R_q(X)^2 = \sum_{k=q}^{2q-2} a_k X^k = X^q \sum_{k=0}^{q-2} a_{k+q} X^{k+q} = X^q Q(X) \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}[X]$$

Donc X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q 33. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Alors $N^q = 0$. Rappelons rapidement pourquoi :

il existe un entier k tel que $N^k = 0$. Alors X^k est un polynôme annulateur de N et les valeurs propres de N appartiennent donc à l'ensemble des racines de X^k, qui est réduit à $\{0\}$. Donc $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$ (le spectre n'est pas vide dans $\mathbb{C}$ car le polynôme caractéristique possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$).

Donc le polynôme caractéristique de N est $\chi_N = X^q$ et donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $N^q = 0$.

En reprenant le polynôme R_q de la question précédente, on a :

$$I_q + N - R_q(N)^2 = N^q Q(N) = 0 \quad \text{donc} \quad R_q(N)^2 = I_q + N$$

Donc $R_q(N)$ est une racine carrée de $I_q + N$.

Q 34. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est à coefficients réels :

$M_0 = M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $M_n \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de M sont réelles car M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$; par conséquent, $P = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i) \in \mathbb{R}[X]$.

Donc $P(M_n) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $P'(M_n) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et par conséquent, $P'(M_n)^{-1} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

D'où $M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Ce qui termine la récurrence.

La suite (M_n) étant stationnaire ; constante égale à A à partir d'un certain rang, $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.
Puis $N = M - A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

En reprenant la démonstration de la question Q30, on a $P(A) = 0$, et P est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ (les valeurs propres de M) donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q 35. On a $P(A) = 0$ donc toute valeur propre de A est racine de P :
$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Q 36. Les valeurs propres de A, notées $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_q$, étant strictement positives, on peut reprendre la méthode vue en II.C, pour obtenir une racine carrée de A, à partir de $A = P\,\mathrm{diag}\left(\lambda'_1, \cdots, \lambda'_q\right) P^{-1}$:
en posant $A' = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda'_1}, \cdots, \sqrt{\lambda'_q}\right) P^{-1}$, on a $(A')^2 = A$.

admis

On a alors $M = A + N = A(I_q + A^{-1}N)$.
Les matrices A et N commutent donc A^{-1} et N commutent donc $(A^{-1}N)^q = (A^{-1})^q N^q = 0$.
$A^{-1}N$ est donc nilpotente donc en utilisant la question Q33, $\left(R_q(A^{-1}N)\right)^2 = I_d + A^{-1}N$.
Les matrices A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent (cf ci-dessous) donc

$$\left(A'R_q(A^{-1}N)\right)^2 = (A')^2 \left(R_q(A^{-1}N)\right)^2 = A(I_q + A^{-1}N) = M$$

Donc $A'R_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de M.

Précisons pourquoi A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent.

En notant $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A.
Alors en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange par exemple, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, s]\!], \quad \sqrt{\lambda'_i} = Q(\lambda_i)$$

On a alors $A' = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda'_1}, \cdots, \sqrt{\lambda'_q}\right) P^{-1} = \cdots = Q(A)$ donc $A' \in \mathbb{C}[A]$.

admis

Or $A^{-1}N$ commute avec A car A et N commutent donc A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent.